Лабораторная работа 5

Метод неявной схемы, используемый в сочетании с аппроксимацией производных на границе с погрешностью O(h2) и граничными условиями Неймана, представляет собой мощный численный подход к решению уравнений в частных производных (УЧП). Этот метод позволяет с высокой точностью анализировать динамические процессы в различных областях науки и инженерии, таких как теплопередача, диффузия и механика сплошных сред.

**Формулы и Определения**

**Аппроксимация УЧП**

Рассматривая уравнение теплопроводности ∂u/∂t = α∂^2u/∂x^2, где u(x,t) - искомая функция (например, температура), α - коэффициент теплопроводности. Метод неявной схемы аппроксимирует производную по времени через разность значений функции в последующем и текущем временных слоях, а вторую производную по пространству - через центральные разности, обеспечивая аппроксимацию с точностью до второго порядка по пространственной переменной h.

**Граничные условия**

Граничные условия Неймана для правой границы ∂u/∂x|x=L ≈ g∂x/∂u|x=L

Значения ∂u/∂x|x=L и g∂x/∂u|x=L аппроксимируются, используя разностное отношение, которое включает значения функции в последней и предпоследней сеточных точках, обеспечивая аппроксимацию второго порядка точности.

**Итерационный Процесс**

1. **Инициализация**: Задается сетка по пространственной координате x и времени t с шагами h и Δt соответственно. Определяются начальные и граничные условия задачи.
2. **Построение системы уравнений**: Используя аппроксимации для производных, формируется система линейных алгебраических уравнений для каждого временного слоя, начиная с известных начальных условий.
3. **Решение системы**: Система уравнений решается относительно неизвестных значений функции в новом временном слое, применяя численные методы линейной алгебры. Этот процесс повторяется для каждого временного шага.

**Результаты**

Решение системы линейных уравнений на каждом временном шаге предоставляет значения искомой функции в дискретных точках сетки, позволяя анализировать её поведение во времени и пространстве. Таким образом, метод неявной схемы в сочетании с аппроксимацией граничных условий Неймана и точностью аппроксимации O(h2) обеспечивает высокую устойчивость и точность решений УЧП.

**Применение**

Метод находит применение в широком спектре задач, требующих анализа динамических процессов в условиях заданных граничных условий, включая исследования в области теплопередачи, диффузии, гидродинамики, а также в множестве инженерных и физических приложений. Эффективность метода особенно высока в задачах, где важна точность аппроксимации граничных условий и устойчивость численного метода при моделировании процессов во времени.

### Уравнение и Задача

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности, которое является классическим примером уравнения в частных производных (УЧП) и используется для описания процесса распространения тепла в твердом теле:

### ∂u/∂t = α∂^2u/∂x^2

### где:

### • u(x,t) - температура в точке x в момент времени t,

### • α - коэффициент теплопроводности, характеризующий способность материала проводить тепло.

### Граничные условия

### 1. Условие Дирихле на левом конце стержня (x=0): u(0,t) = u0, где u0 - заданная температура, которая поддерживается постоянной.

### 2. Условие Неймана на правом конце стержня (x=L): ∂u/∂x|x=L = g, где g - заданное значение производной температуры по координате x, что соответствует фиксированному тепловому потоку через правый конец стержня.

### Начальное условие

### Начальное условие задается функцией u(x,0) = f(x), которая описывает распределение температуры в стержне в начальный момент времени t=0. Функция f(x) может быть выбрана на основе физических соображений или экспериментальных данных.

### Задача

Целью задачи является нахождение функции u(x,t) для всей длины стержня 0≤x≤L и для всего интервала времени 0≤t≤T, удовлетворяющей заданному уравнению теплопроводности, начальному и граничным условиям.

### Задача

Необходимо найти распределение температуры u(x,t) в одномерном стержне длиной L=10 единиц, на протяжении времени наблюдения T=2 единиц времени. Стержень характеризуется коэффициентом теплопроводности α=0.01. Исследование проводится с целью понимания, как изменяется температура стержня от начального момента до конечного времени наблюдения, учитывая заданные начальные и граничные условия.

### Начальные условия

Начальное распределение температуры в стержне задается функцией u(x,0)=sin(Lπx​), что соответствует синусоидальному распределению температуры по длине стержня в начальный момент времени.

### Граничные условия

1. На левом конце стержня (x=0) задается условие Дирихле: температура фиксируется равной нулю (u(0,t)=0), что моделирует идеальный теплоизоляционный или охлаждающий эффект на этом конце.
2. На правом конце стержня (x=L) задается условие Неймана: фиксируется значение производной температуры по координате равное g=1, что соответствует постоянному тепловому потоку через правый конец стержня. Это условие моделирует непрерывное подводимое количество тепла к этому концу стержня.

### Параметры задачи

* Длина стержня L=10.
* Время наблюдения T=2.
* Коэффициент теплопроводности α=0.01.
* Количество шагов по пространству Nx=50.
* Количество шагов по времени Nt=1000.

### Цель задачи

Целью задачи является расчет и визуализация изменения температуры u(x,T) по всей длине стержня в конечный момент времени T, исходя из заданных начальных и граничных условий, используя метод неявных конечных разностей.

### Решение задачи

Решение задачи осуществляется путем численного моделирования распределения температуры в стержне с использованием метода неявных конечных разностей. Данный метод позволяет аппроксимировать производные в уравнении теплопроводности и учитывать начальные и граничные условия для получения решения на дискретной сетке значений x и t. Результаты расчетов представляются в виде графика распределения температуры в конечный момент времени T, что дает наглядное представление о температурном поле в стержне на конец наблюдаемого периода.